離散時間ソリトン方程式と双線形形式 (パンルヴェ方程式の解析)

辻本, 諭

数理解析研究所講究録 1203 巻 2001 年 89-96

離散時間ソリトン方程式と双線形形式
Bilinear form of discrete-time soliton equations

辻本 諭
Satoshi Tsujimoto

大阪大学大学院基礎工学研究科
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

可積分系の離散化は，従来から，非線形微分方程式の数値解析の観点などから研究が進められてきた．近年，数理工学や数理物理学の様々な分野において可積分な離散系が見いだされ，さらに活発な議論がなされてきている．

本稿では、与えられた可積分系から「可積分な」離散方程式を構成する手順として, 双線形化に基づく「可積分系の離散化」の手法について解説する. 代表的な可積分系であるソリトン方程式は, Lax(ラックス) ペア, 無限個の保存量, Bäcklund (ベックルンド) 変換, Painlevé (パンルベ) 性, N ソリトン解などの特筆すべき性質を持っており、離散化されたソリトン方程式についても同様な議論が可能である [3, 5].

可積分系の離散化については, 双線形化法以外にも, Date–Jimbo–Miwa [1], Suris [8] らによるいくつかの手法があるが, 以下では双線形化法を用いた可積分系の時間および空間変数の離散化について, みてゆきたい.

2 離散 KP 方程式と Casorati 行列式

離散 KP 方程式

$$
\begin{aligned}
&a_1(a_2-a_3)\tau^{k_1+a_1,k_2,k_3}\tau^{k_1,k_2+a_2,k_3+a_3}\\
&+a_2(a_3-a_1)\tau^{k_1,k_2+a_2,k_3}\tau^{k_1+a_1,k_2,k_3+a_3}\\
&+a_3(a_1-a_2)\tau^{k_1,k_2,k_3+a_3}\tau^{k_1+a_1,k_2+a_2,k_3}=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

は, 広田・三輪方程式とも呼ばれ, 離散可積分系の基礎方程式とも言うべき双線形形式の一つである [4, 6]. この双線形方程式は，次の Casorati 行列式

$$
\tau=\det|\varphi_i(j-1)|_{1\le i,j\le N} \tag{2}
$$

で表される厳密解を持つ [7]．ここで，行列式の要素 $\varphi_i(s)$ は，離散変数 $s, k_1, k_2, k_3, \ldots$ の関数であり，次の線形方程式

$$\frac{\varphi_i^{k_j}(s) - \varphi_i^{k_j - a_j}(s)}{a_j} = \varphi_i^{k_j}(s+1), \qquad j = 1, 2, 3, \cdots \tag{3}$$

を満たすものとする．このような行列式要素の満たす線形方程式のことをソリトンの世界では通常，分散関係式と呼んでおり，以下でもこの呼称を用いる．また，シフトされていない離散変数は，混乱の恐れのない限り，省略して良いものとする．この行列式 τ を用いることにより，KP 方程式の N ソリトン解を得ることができる．

分散関係式 (3) を用いると，独立変数 k_1 を $k_1 + a_1$ にシフトした行列式

$$\tau^{k_1+a_1} = \det\left|\varphi_i^{k_1+a_1}(j-1)\right|_{1\le i,j\le N}$$

は、行列式の操作を経て

$$a_1\tau^{k_1+a_1} = \det\left|\ \varphi_i^{k_1}(j-1),\ _{1\le j\le N-1}\ \vdots\ \varphi_i^{k_1+a_1}(N-2)\ \right|_{1\le i\le N}$$

と表わされ，$\tau^{k_1+a_1,k_2+a_2}$ の場合においても，

$$\begin{aligned}&(a_1 - a_2)\tau^{k_1+a_1,k_2+a_2} = \\ &\qquad\left|\ \varphi_i^{k_1,k_2}(j-1),_{1\le j\le N-2}\ \vdots\ \varphi_i^{k_1,k_2+a_2}(N-2)\quad \varphi_i^{k_1+a_1,k_2}(N-2)\ \right|_{1\le i\le N}\end{aligned}$$

と表すことができる．離散 KP 方程式 (1) は，これら行列式を用いることにより，行列式の恒等式であるプリュッカー関係式に帰着させられる．これにより，Casorati 行列式 τ が離散 KP 方程式の解であることが示された．

離散 KP 方程式は，離散変数 k_1, k_2, k_3 に対する双線形方程式であったが，より高次の方程式として離散変数 k_1, k_2, k_3, k_4 に対する双線形方程式

$$\begin{aligned}
&a_1^2(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_3-a_4)\tau^{k_1+a_1,k_2,k_3,k_4}\tau^{k_1,k_2+a_2,k_3+a_3,k_4+a_4}\\
-\ &a_2^2(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_3-a_4)\tau^{k_1,k_2+a_2,k_3,k_4}\tau^{k_1+a_1,k_2,k_3+a_3,k_4+a_4}\\
+\ &a_3^2(a_1-a_2)(a_1-a_4)(a_2-a_4)\tau^{k_1,k_2,k_3+a_3,k_4}\tau^{k_1+a_1,k_2+a_2,k_3,k_4+a_4}\\
-\ &a_4^2(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)\tau^{k_1,k_2,k_3,k_4+a_4}\tau^{k_1+a_1,k_2+a_2,k_3+a_3,k_4}\\
=\ &0
\end{aligned} \tag{4}$$

も得られる．Casorati 行列式 τ が上式の厳密解であることは，離散 KP 方程式の場合と同様にして示すことができる．この離散 KP 方程式の系列は，

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-2}\tau_1\tau_{\hat{1}} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-2}\tau_2\tau_{\hat{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-2}\tau_n\tau_{\hat{n}} \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

とまとめて書き表すことができる. ここで $\tau_i, \tau_{\hat{i}}$ の記号はそれぞれ,

$$\tau_i = \tau^{k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_i+a_i,k_{i+1},\cdots,k_n},$$
$$\tau_{\hat{i}} = \tau^{k_1+a_1,k_2+a_2,\cdots,k_{i-1}+a_{i-1},k_i,k_{i+1}+a_{i+1},\cdots,k_n+a_n}$$

を表している.

3　2重 Casorati 行列式

本節では, Casorati 行列式をその特殊の場合に含む2重 Casorati 行列式について考察する. 2重 Casorati 行列式

$$\tau_m(s,\tilde{s}) = \left|\begin{array}{ccc:ccc} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_1(s+m-1) & \psi_1(\tilde{s}) & \cdots & \psi_1(\tilde{s}+M-m-1) \\ \varphi_2(s) & \cdots & \varphi_2(s+m-1) & \psi_2(\tilde{s}) & \cdots & \psi_2(\tilde{s}+M-m-1) \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \varphi_M(s) & \cdots & \varphi_M(s+m-1) & \psi_M(\tilde{s}) & \cdots & \psi_M(\tilde{s}+M-m-1) \end{array}\right| \tag{6}$$

において, $\varphi_i(s)$ は, $k_1, k_2, \cdots$ に関する関数であり, 離散 KP 系列の分散関係式 (3) を満たす. さらに $\psi_i(\tilde{s})$ は, 新たな変数 $l_1, l_2, \cdots$ に関する関数とし, 分散関係

$$\frac{\psi_i^{l_j}(\tilde{s}) - \psi_i^{l_j-b_j}(\tilde{s})}{b_j} = \psi_i^{l_j}(\tilde{s}+1), \quad j = 1, 2, \cdots \tag{7}$$

を満たすものとする. 変数 m は $\varphi_i(s)$ と $\psi_i(s)$ の境界位置を決定する離散変数であり, m が -1 あるいは $M+1$ の時,

$$\tau_{-1}(s,\tilde{s}) \;=\; \tau_{M+1}(s,\tilde{s}) = 0 \tag{8}$$

とする. この行列式もまた, 離散 KP 系列の解であり, Casorati 行列式 (2) との対応関係もある.

2重 Casorati 行列式 $\tau_m(s,\tilde{s})$ の満たす双線形方程式としては, 離散 KP 系列以外にも,

$$\begin{aligned} &\tau_m(s,\tilde{s})\tau_m(s+1,\tilde{s}+1) - \tau_m(s+1,\tilde{s})\tau_m(s,\tilde{s}+1) \\ &-\tau_{m-1}(s+1,\tilde{s})\tau_{m+1}(s,\tilde{s}+1) = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

など, 様々な方程式の導出が可能である. 特に (14) は, 離散 2 次元戸田分子方程式とも呼ばれ, 非常に重要な方程式である. $m = -1, 0, \cdots, M+1$ で定義されたこの解は, 両端で切断された有限格子点上の解となり, 分子解と呼ばれている.

4 NLS 方程式と DS 方程式

前節までの議論より, $\tau_m(s,\tilde{s})$ は, 独立変数 $s,k_1,k_2,k_3,\ldots,\tilde{s},l_1,l_2,l_3,\cdots$ および m の関数であり、 双線形方程式の変数として k_1,k_2,k_3 を選択すると離散 KP 方程式、$s,m,\tilde{s}$ を選択すると離散 2 次元戸田分子方程式を導くことができた. 独立変数の選択や双線形方程式の組み合わせ方により, 様々な方程式を導くことが可能となる. 以下では, 非線形 Schrödinger (NLS) 方程式と Davey-Stewartson (DS) 方程式の場合を例にあげて, この様子を見てゆく.

4.1 連続時間

NLS 方程式と DS 方程式の双線形形式は, 2 次元戸田分子方程式

$$D_{x_1}D_{y_1}\tau_m\cdot\tau_m=2\tau_{m+1}\tau_{m-1} \tag{10}$$

と 2 成分 KP 方程式

$$(D_{x_2}+D_{x_1}^2)\tau_{m+1}\cdot\tau_m=0 \tag{11}$$

$$(D_{y_2}+D_{y_1}^2)\tau_{m+1}\cdot\tau_m=0 \tag{12}$$

から導くことができる. まず, $2i\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial y_2}$ とおくと (11), (12) より,

$$(2iD_t+D_{x_1}^2+D_{y_1}^2)\tau_{m+1}\cdot\tau_m=0 \tag{13}$$

が得られる. さらに $2N$ 次の 2 重ロンスキアンに対し, $m=N$ と固定し, 次の条件

$$\tau_N\in\text{Real},\quad \overline{\tau_{N+1}}=\tau_{N-1}$$

を課すことにより, DS 方程式が得られる [2]. ここで $\overline{}$ は複素共役を表し, この条件を Reality 条件と呼ぶ. NLS 方程式の場合は, さらに, Reduction 条件

$$\frac{\partial\tau_N}{\partial x_1}=\frac{\partial\tau_N}{\partial y_1}$$

を課すことにより,「時間 1 次元+空間 1 次元」の方程式が得られる.

4.2 離散時間

連続時間の場合を参考に, 離散化を試みる. まず, 次の双線形離散方程式を用意する.
離散 2 次元戸田分子方程式:

$$\begin{aligned}&\tau_m(s,\tilde{s})\tau_m(s+1,\tilde{s}+1)-\tau_m(s+1,\tilde{s})\tau_m(s,\tilde{s}+1)\\&-\tau_{m-1}(s+1,\tilde{s})\tau_{m+1}(s,\tilde{s}+1)=0\end{aligned} \tag{14}$$

離散 2 成分 KP 方程式:

$$
\begin{aligned}
&\tau_m^{t_1}(s,\tilde{s})\tau_{m+1}^{t_1+1}(s-1,\tilde{s}+1)-\tau_m^{t_1+1}(s,\tilde{s})\tau_{m+1}^{t_1}(s-1,\tilde{s}+1)\\
&=a_1\tau_m^{t_1}(s-1,\tilde{s})\tau_{m+1}^{t_1+1}(s,\tilde{s}+1)-b_1\tau_m^{t_1+1}(s,\tilde{s}+1)\tau_{m+1}^{t_1}(s-1,\tilde{s}) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ここで離散変数は t_1 は $\frac{\partial}{\partial t_1}=a_1\frac{\partial}{\partial k_1}+b_1\frac{\partial}{\partial l_1}$ により導入した. 双線形方程式 (14),(15) は，定数係数を一般化した次式のように変形する事が可能である.

$$
\begin{aligned}
&f_m^{t_1}(s,\tilde{s})f_m^{t_1}(s+1,\tilde{s}+1)-f_m^{t_1}(s,\tilde{s}+1)f_m^{t_1}(s+1,\tilde{s})\\
&-f_{m-1}^{t_1}(s+1,\tilde{s})f_{m+1}^{t_1}(s,\tilde{s}+1)=0 \qquad (16)\\
&\alpha_2 f_m^{t_1}(s,\tilde{s})f_{m+1}^{t_1+1}(s-1,\tilde{s}+1)-\beta_2 f_m^{t_1+1}(s,\tilde{s})f_{m+1}^{t_1}(s-1,\tilde{s}+1)\\
&=\alpha_1 f_m^{t_1}(s-1,\tilde{s})f_{m+1}^{t_1+1}(s,\tilde{s}+1)-\beta_1 f_m^{t_1+1}(s,\tilde{s}+1)f_{m+1}^{t_1}(s-1,\tilde{s}) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

次に Reality 条件を考える. この場合, $\tau_m(s,\tilde{s})$ を $2N$ 次の行列式とすると，

$$
f_N^{t_1}(s,\tilde{s})\in \mathrm{Real}, \qquad \text{for } s,\tilde{s},t_1=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots
$$

の条件を課すと, (16) より，

$$
\overline{f_{N+1}(s,\tilde{s}+1)}=f_{N-1}(s+1,\tilde{s})
$$

も満たす事が必要である. 以上から, 離散 DS 方程式の導出が期待されるが, 実際に得られる方程式は離散 NLS 方程式である. Reality 条件を満たすようソリトン解中の任意パラメータや差分間隔に関連した $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ を制限していくと，Reduction 条件

$$
f_N(s+1,\tilde{s})=f_N(s,\tilde{s}+1)
$$

まで満たしてしまう.

離散 NLS 方程式

ここで得られる離散 NLS 方程式は次の通りである.

$$
\begin{aligned}
&f_N^{t_1}(s-1)f_N^{t_1}(s+1)-f_N^{t_1}(s)f_N^{t_1}(s)-f_{N-1}^{t_1}(s)f_{N+1}^{t_1}(s)=0\\
&\alpha_2 f_m^{t_1}(s)f_{N+1}^{t_1+1}(s)-\beta_2 f_N^{t_1+1}(s)f_{N+1}^{t_1}(s)\\
&=\alpha_1 f_N^{t_1}(s-1)f_{N+1}^{t_1+1}(s+1)-\beta_1 f_N^{t_1+1}(s+1)f_{N+1}^{t_1}(s-1)\\
&\alpha_2 f_{N-1}^{t_1}(s)f_N^{t_1+1}(s)-\beta_2 f_{N-1}^{t_1+1}(s)f_N^{t_1}(s)\\
&=\alpha_1 f_{N-1}^{t_1}(s-1)f_N^{t_1+1}(s+1)-\beta_1 f_{N-1}^{t_1+1}(s+1)f_N^{t_1}(s-1)
\end{aligned}
$$

$\alpha_2=i/\delta-1,\beta_2=i/\delta+1,\alpha_1=-1,\beta_1=1$ とおき，
離散 NLS 方程式の従属変数 φ_s^t を

$$
\varphi_s^t=\frac{f_{N+1}^t(s)}{f_N^t(s)} \qquad (18)
$$

とすると，その複素共役 $\overline{\varphi_s^t}$ は

$$\overline{\varphi_s^t} = \frac{f_{N-1}^t(s)}{f_N^t(s)} \tag{19}$$

と表される.

離散 DS 方程式
新たに t_2 方向の時間発展を記述する離散 2 成分 KP 方程式を用意する. $(\frac{\partial}{\partial t_2} = a_2\frac{\partial}{\partial k_2} + b_2\frac{\partial}{\partial l_2})$
このとき, Reality 条件は

$$f_N^{t,-t} \in \mathrm{Real}, \overline{f_{N+1}^{t,-t}(s,\tilde{s}+1)} = f_{N-1}^{t,-t}(s+1,\tilde{s})$$

となる. 離散 DS 方程式は

$$\begin{aligned}
&f_N^{t_1,t_2}(s,\tilde{s})f_N^{t_1,t_2}(s+1,\tilde{s}+1) - f_N^{t_1,t_2}(s,\tilde{s}+1)f_N^{t_1,t_2}(s+1,\tilde{s}) \\
&- f_{N-1}^{t_1,t_2}(s+1,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1,t_2}(s,\tilde{s}+1) = 0 &(20)\\
&\alpha_2 f_N^{t_1,t_2}(s,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1+1,t_2}(s-1,\tilde{s}+1) - \beta_2 f_N^{t_1+1,t_2}(s,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s}+1) \\
&= \alpha_1 f_N^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1+1,t_2}(s,\tilde{s}+1) - \beta_1 f_N^{t_1+1,t_2}(s,\tilde{s}+1)f_{N+1}^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s}) &(21)\\
&\overline{\alpha_1} f_N^{t_1,t_2}(s,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1,t_2+1}(s-1,\tilde{s}+1) - \overline{\beta_1} f_N^{t_1,t_2+1}(s,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s}+1) \\
&= \overline{\alpha_2} f_N^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s})f_{N+1}^{t_1,t_2+1}(s,\tilde{s}+1) - \overline{\beta_2} f_N^{t_1,t_2+1}(s,\tilde{s}+1)f_{N+1}^{t_1,t_2}(s-1,\tilde{s}) &(22)
\end{aligned}$$

と表される. 従属変数を

$$U_{s,\tilde{s}}^t = \frac{f_{N+1}^{t,-t}(s,\tilde{s}+1)}{f_N^{t,-t}(s,\tilde{s})}$$

とおくと，$\overline{U_{s,\tilde{s}}^t}$ は

$$\overline{U_{s,\tilde{s}}^t} = \frac{f_{N-1}^{t,-t}(s+1,\tilde{s})}{f_N^{t,-t}(s,\tilde{s})}$$

と表される. DS 方程式に特徴的な解であるドローミオンの厳密解の時間発展 $|U_{s,\tilde{s}}^t|$ を図 1 に示す.

5　まとめ

双線形方程式から非線形な離散方程式を得る手法において，双線形方程式の組み合わせ方や，従属変数の選択など，様々な自由度があり，新しい方程式を導く際には非常に有用である. さらに，離散可積分系の様々な分野への応用なども，期待される.

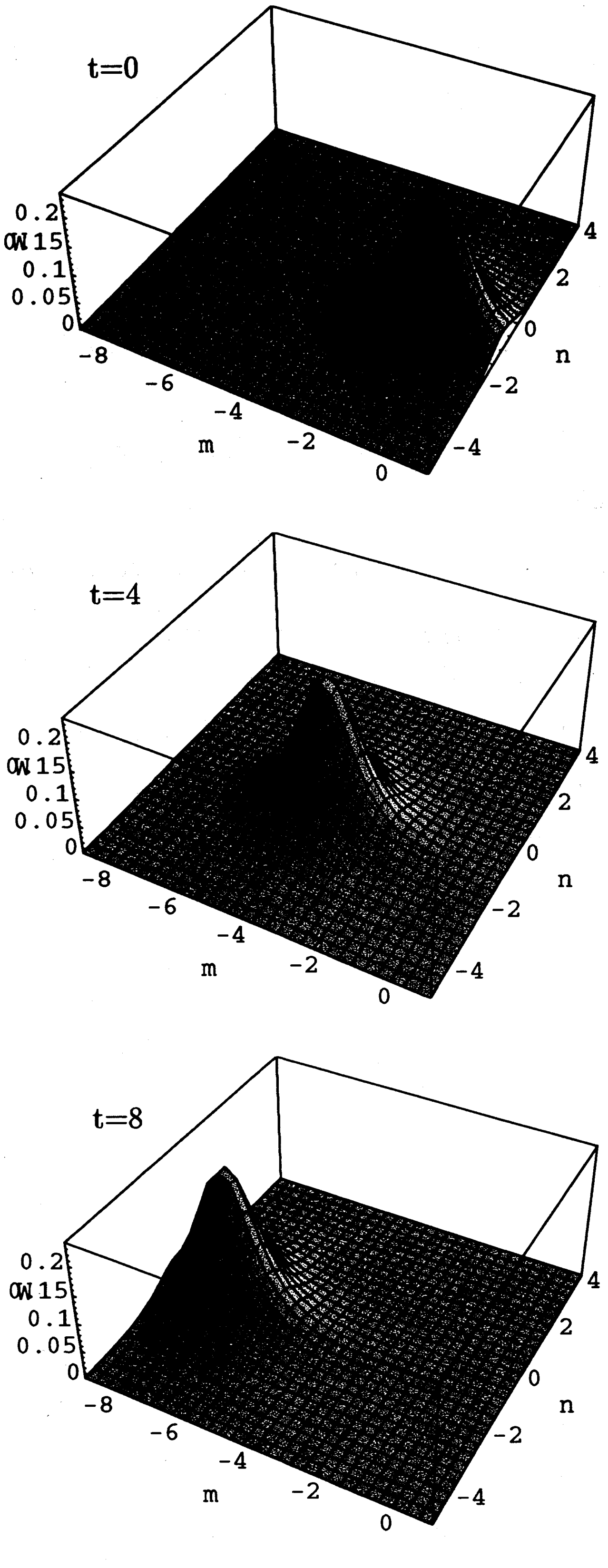

図 1: 離散 DS 方程式の厳密解 (dromion 解)

参考文献

[1] E.Date, M.Jimbo, and T.Miwa, *Methods for generating discrete soliton equations. I–IV*, J.Phys.Soc.Jpn, **51**, 4116–4124, 4125–4131; **52**, 761–765, 766-771 (1982-3).

[2] J.Hietarinta, and R.Hirota, *Multidromion solutions to the Davey-Stewartson equation*, Phys.Lett. A, **179** , 237–244 (1990).

[3] 広田良吾:"直接法によるソリトンの数理", 岩波書店 (1992).

[4] R.Hirota, *Discrete analogue of a generalized Toda equation*, J.Phys.Soc.Jpn., **50**, 3785–91 (1981).

[5] R.Hirota, *Nonlinear partial difference equations. I–V*, J. Phys. Soc. Jpn **43**, 1423–33, 2074-78, 2079–86; **45**, 321–32; **46**, 312–9 (1977-8).

[6] T.Miwa, *On Hirota's difference equations*, Proc.Jpn.Acad., **58**, 9–12 (1982).

[7] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai, *Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy*, J.Phys.Soc.Jpn., **62** , 1872–1886 (1993).

[8] Yu.B.Suris, *Bi-Hamiltonian structure of the qd algorithm and new discretizations of the Toda lattice*, Phys.Lett. A, **206**, 153–61 (1995).